

Méthodes d'optimisation pour l'approche de problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques hyperboliques

Jean-Sébastien Le Brizaut

*Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR CNRS 6629), Ecole Centrale de Nantes, BP 92101,
44321 Nantes cedex 03, France*

Reçu le 1^{er} février 2003

Résumé

Des résultats fonctionnels et numériques sont présentés dans le cas d'un problème aux limites non linéaire de type mixte elliptique hyperbolique significatif : un modèle des écoulements transsoniques avec prise en compte d'une condition d'entropie. Une relation entre le problème continu et sa discrétisation est établie.

© 2003 Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

Abstract

Functional and numerical results are presented for a significative nonlinear boundary value problem of mixed type elliptic hyperbolic: a transonic flows model taking into account an entropy condition. Relation between continuous problem and its discretization in finite dimension is stated.

© 2003 Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

MSC : 35D05 ; 35M10 ; 65N30

Mots-clés : Problème aux limites non linéaire de type mixte ; Solutions généralisées à ε près ; Discrétisation ; Résultats numériques

1. Introduction

Les travaux présentés dans cet article concernent des problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques hyperboliques auxquels on adjoint une contrainte inégalité. Une liste d'exemples conduisant à de tels problèmes peut être trouvée en [21]. Ici

Adresse e-mail : le-brizaut@ec-nantes.fr (J.-S. Le Brizaut).

nous considérons le cas significatif présenté par le problème aux limites résultant du modèle de Karman et Guderley (voir par exemple [10,17,42]) avec condition d'entropie [8]. Cette dernière résulte de l'application du second principe de la thermodynamique lorsque certaines inconnues d'origine mécanique sont supposées bornées (voir par exemple [15,25]). Ce modèle a l'avantage de s'énoncer simplement tout en présentant un terme non linéaire conduisant aux difficultés fondamentales des problèmes mixtes non linéaires. Le problème aux limites résultant de ce modèle est mal posé : à présent, il n'existe pas, à notre connaissance, de cadre fonctionnel assurant l'existence de solutions, notion à rapprocher de celle de [3]. De plus, des essais numériques montrent que plusieurs solutions peuvent exister [18].

Différentes méthodes d'approche de systèmes de type mixte elliptique hyperbolique ont été et sont proposées. Beaucoup concernent des résultats numériques, moins des résultats fonctionnels et peu la relation entre l'approche fonctionnelle et l'approche numérique. Sans être exhaustifs, nous mentionnons maintenant certaines méthodes d'approche. Des études numériques intensives utilisant des éléments finis dans le cadre de méthodes variationnelles sont un moyen naturel pour traiter des problèmes mixtes non linéaires, on pourra consulter [1,5,12] et les bibliographies associées. Sur le plan fonctionnel, citons les travaux de [9,13] fondés sur des arguments provenant essentiellement de l'étude de systèmes non linéaires hyperboliques, ceux de [15,16,32,35] pour l'approche de problèmes mixtes non linéaires à partir de résultats de compacité par compensation [33]. Pour des résultats portant sur la relation entre l'approche numérique et l'approche fonctionnelle, citons [8].

Notre propos n'est pas de développer de telles études mais plutôt de les compléter en fournissant une méthode d'analyse assurant la cohérence entre les résultats fonctionnels et numériques. Rappelons l'origine du modèle de Karman et Guderley. Les écoulements plan étudiés ici sont régis par les équations fondamentales assurant la conservation de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie, couplées au second principe de la thermodynamique (voir [10,17,40] par exemple). Quand on suppose que le tourbillon est négligé de sorte que l'écoulement devient isentropique, on est amené à ne considérer que la fonction Φ solution de l'équation par rapport au potentiel complet. L'écoulement est supposé symétrique par rapport à l'axe x_1 . Introduisons la demi épaisseur δ du profil, la nombre de Mach M et la vitesse à l'infini $v_\infty = (0, u_\infty)$. Le couple (δ, M) est pris au voisinage de $(0, 1)$ avec u_∞ constant. La différence $\nabla u = \nabla \Phi - v_\infty$ est supposée suffisamment petite. Dans ces conditions, suivant [34,43], u satisfait le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u)) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega), \\ \partial_2 u = g & (\Gamma), \\ u = 0 & (\Gamma'), \end{cases} \quad (S)$$

où les données géométriques sont :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in]-1, 1[, x_2 \in]0, 1[\}, \\ \Gamma &= \{x = (x_1, 0), x_1 \in]-1, 1[\}, \\ \Gamma' &= \partial\Omega - \Gamma, \end{aligned}$$

et les données fonctionnelles :

$$\alpha(s) = (k - ls)s,$$

$$g(s) = \begin{cases} \sqrt{M}(-4s) & \text{si } s \in [-1/2, 1/2], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où :

$$k = 6,25 \left(\frac{1}{M} - M \right), \quad l = 1, 2, \quad M \in]0, 1[.$$

En tenant compte du fait que l'écoulement est stationnaire, l'utilisation du second principe de la thermodynamique conduit à :

$$\Delta\Phi \leq 0.$$

En cohérence avec les approximations précédentes, on suppose que certains termes sont bornés (voir par exemple [15,25]) et on obtient :

$$\Delta u \leq C \quad (\text{CE})$$

où C est inconnu a priori.

Cette inégalité avait déjà été utilisée dans [8].

Dans cet article, on s'intéresse au problème aux limites (S) associé à la contrainte (CE).

On commence par traiter (S) sans contrainte dans le paragraphe 2. En raison du terme non linéaire α , des propriétés de compacité, monotonie, convexité et contraction ne sont pas assurées a priori. Cette situation défavorable conduit d'abord à construire une approche du problème puis à établir des résultats fonctionnels et numériques. Suivant [39], les relations sont cherchées dans un espace de Sobolev. Celui-ci contient des fonctions à dérivée discontinue ce qui permet éventuellement de prendre en compte les chocs. L'utilisation d'une formulation variationnelle et de la formule de Green généralisée ramènent le problème à montrer qu'une projection adaptée s'annule. L'introduction d'une norme adaptée conduit à minimiser une fonctionnelle en u . Cette procédure a été introduite en [24,36,39]. On utilise des solutions généralisées à ε près correspondant aux quasi minima d'Ekeland (pour cette notion, voir [2,19]). L'intérêt de ces méthodes à ε près est d'assurer une cohérence entre le cadre fonctionnel dans les espaces de Sobolev et celui de la dimension finie (en considérant les éléments finis par exemple) bien que le problème soit mal posé (théorèmes 1 et 2, comparables à certains des résultats de [6,36]). Ceci est confirmé par les essais numériques (figure 1) ; on y utilise des méthodes d'optimisation en dimension finie (paragraphe 2.3). Mentionnons que d'autres auteurs utilisent l'optimisation afin d'approcher une solution de (S) : voir par exemple [4,7,8] et plus récemment [16]. Dans ces travaux, les fonctionnelles introduites sont différentes de celles considérées ici et l'intérêt des solutions généralisées à ε près n'est pas développé par les mêmes arguments.

Dans le paragraphe 3, on considère (S) avec la contrainte (CE). Le paramètre C est recherché dans un intervalle réel suffisamment grand a priori. La contrainte (CE) est également transformée par la formule de Green généralisée ce qui conduit à une contrainte égalité. Afin de traiter à la fois (S) et (CE), une fonctionnelle pénalisée est minimisée. Comme dans le paragraphe 2, on obtient une relation avec le problème en dimension finie (théorème 5). L'utilisation d'une méthode du gradient portant sur le couple (u, C) et de la pénalisation par un terme prenant en compte le caractère mixte fournit un moyen de détermination approchée de (u, C) . Ceci répond en partie à la question concernant l'arbitraire sur C posée en [38].

2. Problème aux limites sans contrainte

2.1. Position du problème

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u)) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega), \\ \partial_2 u = g & (\Gamma), \\ u = 0 & (\Gamma'), \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

où les données géométriques sont :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in]-1, 1[, x_2 \in]0, 1[\}, \\ \Gamma &= \{x = (x_1, 0), x_1 \in]-1, 1[\}, \\ \Gamma' &= \partial\Omega - \Gamma, \end{aligned}$$

et les données fonctionnelles :

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (k - ls)s, \\ g(s) &= \begin{cases} \sqrt{M}(-4s) & \text{si } s \in [-1/2, 1/2], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \end{aligned}$$

où :

$$k = 6,25 \left(\frac{1}{M} - M \right), \quad l = 1, 2, \quad M \in]0, 1[.$$

L'inconnue est une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Introduisons le champ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \partial_1 u, \\ q_2 &= \partial_2 u, \end{aligned}$$

le système par rapport à q obtenu de (1) est mixte :

$$\begin{cases} \text{elliptique} & \text{si } q_1 < u_c, \\ \text{hyperbolique} & \text{si } q_1 > u_c, \end{cases} \quad (4)$$

où :

$$u_c = \frac{k}{2l}.$$

Plus généralement, on peut se donner $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

2.2. Méthodes fonctionnelles

2.2.1. Formulation en projection

On cherche $u \in H^1(\Omega)$. En tenant compte du terme non linéaire de (1) et des conditions (2)–(3), on introduit les espaces :

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma'\},$$

$$U = \{u \in V, \partial_1 u \in L^4(\Omega)\}.$$

Si (1)–(3) admet une solution $u \in U$ alors, en utilisant la formule de Green généralisée, elle satisfait l'équation variationnelle :

$$(\alpha(\partial_1 u), \partial_1 v)_0 + (\partial_2 u, \partial_2 v)_0 = -\langle g, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (5)$$

où :

$$(\cdot, \cdot)_0 \text{ désigne le produit scalaire dans } L^2(\Omega),$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ désigne la dualité } (H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Introduisons la fonction $u_g \in V$ solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_g = 0 & (\Omega), \\ \partial_2 u_g = -g & (\Gamma), \\ u_g = 0 & (\Gamma'). \end{cases}$$

On en déduit que (5) équivaut à :

$$(S(u), \nabla v)_0 = 0, \quad \forall v \in V,$$

où

$$S(u) = \begin{pmatrix} \alpha(\partial_1 u) \\ \partial_2 u \end{pmatrix} - \nabla u_g.$$

Soit P_W la projection de $(L^2(\Omega))^2$ sur le sous-espace $W = \{\nabla v, v \in V\}$. On obtient :

Proposition 1. *Le problème (1)–(3) admet une solution $u \in U$ si et seulement si :*

$$P_W S(u) = 0. \quad (6)$$

Pour donner un sens au terme non-linéaire en α , on est amené à chercher $\partial_1 u$ dans $L^4(\Omega)$. Ceci est cohérent avec le cadre fonctionnel de [15,35] où $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ et plus récemment de [36] où $\nabla u \in L^p(\Omega)$, $p > 2$.

2.2.2. Solutions généralisées à ε près

Le cadre fonctionnel de la proposition 1 permet de traiter (6) en utilisant la notion de solutions généralisées à ε près. Introduisons la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2} |P_W S(u)|_0^2 \quad (7)$$

et

$$m = \inf \{J(v); v \in U\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, une solution généralisée à ε près est une fonction $u_\varepsilon \in U$ telle que :

$$J(u_\varepsilon) \leq m + \varepsilon. \quad (8)$$

Cette notion est à rapprocher de celle de quasi-minima introduite par exemple dans [2,19]. Puisque J est positive, les solutions généralisées à ε près existent toujours ; la difficulté est d'en construire. L'utilisation de la formule de Green généralisée montre que si u_ε est solution de (8), elle satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div} S(\nabla u_\varepsilon) - \operatorname{div} \eta = 0 & (\Omega), \\ \partial_2 u_\varepsilon - \eta_2 = 0 & (\Gamma'), \\ u_\varepsilon = 0 & (\Gamma), \end{cases} \quad (9)$$

où $|\eta|_0 \leq m + \varepsilon$. Lorsque S est remplacée par un prolongement adapté Z dans (9), on montre en [39] que (9) admet une solution avec $m = 0$. Réciproquement, le remplacement de Z par S reste, à notre connaissance, un problème ouvert. Au paragraphe 2.4, des essais numériques montrent que m est proche de 0.

Nous n'avons pas nécessairement l'unicité des solutions généralisées à ε près. Introduisons une propriété d'unicité à ε près. Soit $\eta > 0$ suffisamment petit, on considère une partition de Ω en ω_i , $i = 1, \dots, N$, telle que :

$$|\omega_i| \leq \eta$$

(où $||$ désigne l'aire de ω_i) et on introduit les fonctionnelles :

$$I_i(v) = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} v \, dx.$$

On pose :

$$K_0 = U.$$

Considérons les bornes inférieures et les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N, \\ m_i &= \inf \{ I_i(v), v \in K_{i-1} \}, \\ K_i &= \{ v \in K_{i-1}, I_i(v) \leq m_i + \varepsilon \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Soient u et \underline{u} deux éléments de K_N ; comme les K_i sont emboîtés, on a :

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N, \\ I_i(u) &\leq m_i + \varepsilon \leq I_i(\underline{u}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient la :

Proposition 2. Soient u et \underline{u} deux solutions généralisées à ε près alors on a :

$$\frac{1}{|\omega_i|} \left| \int_{\omega_i} (u - \underline{u}) \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

Pour la dimension finie, signalons un résultat d'unicité analogue obtenue en [28] et mentionnons les résultats de [16] (lemme 4.6 et théorème 4.8).

Selon le choix de η et celui de ε , la mise en œuvre numérique de l'algorithme (10) peut être longue.

2.2.3. Passage en dimension finie

Introduisons la norme de U :

$$\|v\|_4 = |v|_0 + |\partial_1 v|_{L^4(\Omega)} + |\partial_2 v|_0.$$

Proposition 3. *Il existe une base dénombrable dense pour $(U, \|\cdot\|_4)$.*

Démonstration. Soit $u \in U$, pour $\varepsilon > 0$, par troncature et convolution (voir par exemple [14]), il existe une fonction $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que :

$$v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma' \text{ avec } \|u - v_\varepsilon\|_4 \leq \varepsilon.$$

A v_ε fixé, il existe w_ε polynôme de degré 1 par morceaux tel que :

$$\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_4 \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, une base dénombrable peut par exemple être fournie par une méthode des éléments finie P1D2. \square

Notons (e_i) une base dénombrable de U , V_n est le sous-espace de dimension finie engendré par (e_1, \dots, e_n) . On introduit :

$$m_n = \inf\{J(v), v \in V_n\}.$$

Proposition 4. *On a : $m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$.*

Démonstration. Soit $n_1 < n$, on a : $V_{n_1} \subset V_n$ d'où :

$$\inf\{J(v), v \in V_n\} \leq \inf\{J(v), v \in V_{n_1}\}$$

c'est à dire :

$$m_n \leq m_{n_1}.$$

De même, on a :

$$V_n \subset U$$

d'où :

$$m \leq m_n.$$

Quand n augmente, la suite m_n est décroissante minorée par m d'où :

$$m_n \rightarrow \alpha$$

avec :

$$m_n \geq \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \geq m.$$

Supposons $\alpha > m$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$m < m + \varepsilon < \alpha.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists u_\varepsilon \in U$ tel que $m \leq J(u_\varepsilon) \leq m + \varepsilon$.

La proposition 3 entraîne :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists u_n \in V_n \quad \text{tel que } u_\varepsilon = u_n + \theta \text{ où } \|\theta\|_4 \leq \varepsilon_1.$$

Par composition de fonctions continues, il suffit de montrer que :

$$U, \|\cdot\|_4 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2, \|\cdot\|_0, \\ v \mapsto S(v),$$

est continue. Il vient :

$$S(u) - S(v) = \begin{cases} k \partial_1(u - v) - I[(\partial_1 u)^2 - (\partial_1 v)^2], \\ \partial_2(u - v). \end{cases} \quad (i)$$

Par utilisation de l'inégalité de Cauchy–Schwartz, on a :

$$|(\partial_1 u)^2 - (\partial_1 v)^2|_0 \leq |\partial_1(u - v)|_{L^4(\Omega)}^2 |\partial_1(u + v)|_{L^4(\Omega)}^2. \quad (ii)$$

On déduit de (i) et (ii) que S est continue. On obtient :

$$J(u_n) = J(u_\varepsilon) + r(\varepsilon_1) \quad \text{où } r(\varepsilon_1) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0 \text{ et } J(u_n) \leq m + \varepsilon + r(\varepsilon_1).$$

On choisit ε_1 suffisamment petit de telle sorte que :

$$\alpha \leq J(u_n) \leq m + \varepsilon + r(\varepsilon_1) < \alpha$$

d'où la contradiction. \square

Théorème 1. *Le problème (U, J) a une solution à ε près : $\exists u_\varepsilon \in U : J(u_\varepsilon) \leq \varepsilon$ si et seulement si, pour n suffisamment grand, le problème (V_n, J) a une solution à ε près :*

$$\exists u_n \in V_n : J(u_n) \leq \varepsilon.$$

Ce résultat étend ceux obtenus en [40].

Lors de mise en œuvre numérique, on est amené à remplacer J par :

$$J_n(v) = \frac{1}{2} |P_{V_n} S(\nabla v)|_0^2, \quad \forall v \in V_n. \quad (11)$$

Pour cette fonctionnelle, la démonstration du théorème 1 reste une question ouverte.

2.2.4. Formulation en distance

Au lieu de chercher à minimiser la projection, on cherche à minimiser la distance de $S(v)$ à W^\perp . On introduit la fonctionnelle sur $U \times W^\perp$:

$$I(v, z) = \frac{1}{2} |S(v) - z|_0^2 \quad (12)$$

et on pose :

$$m = \inf \{ I(v, z), (v, z) \in U \times W^\perp \}.$$

On souhaite déterminer $(W^\perp)_n$. Soit $q \in W^\perp$, on a :

$$(q, \nabla v)_0 = 0, \quad \forall v \in V.$$

Pour $\varphi \in D(\Omega)$, on a :

$$-\operatorname{div} q(\varphi) = (q, \nabla \varphi)_0.$$

On en déduit :

$$\operatorname{div} q = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} q \in L^2(\Omega);$$

la formule de Green généralisée s'applique :

$$(q, \nabla v)_0 = \langle q, n, v \rangle - (\operatorname{div} q, v)_0,$$

d'où :

$$\langle q, n, v \rangle = 0.$$

De $v = 0$ sur Γ' , q satisfait :

$$\begin{cases} q \in L^2(\Omega) \\ \operatorname{div} q = 0 & (\Omega), \\ q \cdot n = 0 & (\Gamma). \end{cases} \quad (13)$$

Introduisons la notation :

$$w = {}^t q = \begin{pmatrix} q_2 \\ -q_1 \end{pmatrix},$$

(13) implique : $\operatorname{rot} w = 0$ dans Ω , d'où (voir par exemple [11], chapitre 9, paragraphe 1, proposition 2, p. 253) :

$$w = \nabla \underline{v} \quad \text{avec} \quad \underline{v} \in H^1(\Omega).$$

On obtient :

$$\begin{cases} q = {}^t \nabla \underline{v} & (\Omega), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 & (\Gamma). \end{cases}$$

Réciproquement, a-t-on ${}^t \nabla \underline{v} \in W^\perp$, c'est à dire : $({}^t \nabla v, \nabla v)_0 = 0 \quad \forall v \in V$? Appliquons la formule de Green généralisée :

$$({}^t \nabla \underline{v}, \nabla v)_0 = \langle {}^t \nabla \underline{v}, n, v \rangle - (\operatorname{div} {}^t \nabla \underline{v}, v)_0 = \langle {}^t \nabla \underline{v}, n, v \rangle_\Gamma = \left\langle \frac{\partial v}{\partial \tau}, v \right\rangle_\Gamma = 0.$$

On obtient la :

Proposition 5. $q \in W^\perp$ si et seulement si

$$\begin{cases} q = {}^t \nabla \underline{v} & (\Omega), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 & (\Gamma) \end{cases}$$

avec $\underline{v} \in H^1(\Omega)$.

Introduisons $V_\Gamma = \{v \in H^1(\Omega), \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0(\Gamma)\}$. Soit (e_{n_Γ}) une base dénombrable dense de $(V_\Gamma, |\cdot|_1)$, on note $(V_\Gamma)_n$ le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $(e_{1_\Gamma}, \dots, e_{n_\Gamma})$. On prend :

$$(W^\perp)_n = \{z = {}^t \nabla v, v \in (V_\Gamma)_n\},$$

et on pose :

$$m_n = \inf \{ I(u, z), (u, z) \in V_n \times (W^\perp)_n \}$$

et par des arguments analogues à ceux des paragraphes 1/2/2/ et 1/2/3/, on obtient le :

Théorème 2. *Le problème $(U \times W^\perp, I)$ a une solution à ε près si et seulement si, pour n suffisamment grand, le problème $(V_n \times (W^\perp)_n, I)$ a une solution à ε près.*

Sur le plan numérique, l'introduction de $V_n \times (W^\perp)_n$ double la dimension du problème traité par rapport à la formulation en projection. Néanmoins, on obtient une expression directe de la fonctionnelle I à minimiser. Dans cette formulation en distance, la difficulté signalée à la fin de 2.2.3. est levée.

2.3. Méthodes d'optimisation en dimension finie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation en projection. Pour les applications numériques, on interpole la fonctionnelle J introduite en (7) par J_n introduite en (11).

Proposition 6. *Soient $u \in U$ et $u_n \in V_n$ tels que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} u$ alors :*

$$P_W S(u_n) - P_{W_n} S(u_n) \xrightarrow{W} 0 \text{ faiblement.}$$

Démonstration. Soient $u \in U$ et $u_n \in V_n$ tels que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} u$,

$$(P_W S(u_n) - P_{W_n} S(u_n), v)_0 = (S(u_n), v - P_{W_n} v)_0.$$

On a :

$$v - P_{W_n} v \xrightarrow{W} 0.$$

D'autre part, $S(u_n)$ est borné. On en déduit la proposition. \square

A n fixé, on s'intéresse à évaluer :

$$\bar{m}_n = \inf \{ J_n(v), v \in V_n \}.$$

Pour $v \in V_n$, on a : $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ et en reportant dans J_n , on obtient :

$$J_n(v) = \sum a_{ijkl} v_i v_j v_k v_l + \sum a_{ijk} v_i v_j v_k + \sum a_{ij} v_i v_j + \sum a_i v_i + a_g$$

où les indices $(i, j, k, l) \in [1, \dots, n]$, les coefficients dépendent de n fixé et $a_g = |\nabla u_g|_0^2$. A priori, les coefficients des termes rectangles ne sont pas nécessairement positifs ce qui nous conduit à introduire un prolongement $\theta \in C^2(R^n)$ tel que :

$$\theta(v) = \begin{cases} v & |v| \leq R, \\ 0 & |v| \geq R + \eta, \quad \eta > 0, \end{cases} \quad (14)$$

et à modifier la fonctionnelle J_n en :

$$\tilde{J}_n(v) = J_n(\theta(v)).$$

On pose :

$$\tilde{m}_n = \inf\{\tilde{J}_n(v), v \in V_n\}. \quad (15)$$

On s'intéresse aux minima locaux de \tilde{J}_n . Des résultats établis en [23,26], on obtient le :

Théorème 3. Soit $\varepsilon > 0$, (15) a des minima locaux à ε près : $\exists u_{n_\varepsilon} \in V_n$ tel que $|\nabla \tilde{J}_n(u_{n_\varepsilon})| \leq \varepsilon$.

De plus, pour $\rho \in]0, 1/B[$ où $B = \sup\{|\nabla^2 \tilde{J}_n(v)|, v \in R^n\}$, l'algorithme :

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,} \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} - \rho \nabla \tilde{J}_n(u^{(k)}) \end{cases}$$

fournit des minima locaux. On s'intéresse maintenant aux minima globaux de \tilde{J}_n . Introduisons l'algorithme stochastique :

$$\begin{cases} X_0 & \text{donné,} \\ X_{n+1} = X_n - \rho \nabla \tilde{J}_n(X_n) + Z_n & \text{avec } n \geq 0, \end{cases}$$

où Z_n sont indépendantes et suivent $N(\mu, \sigma)$. Des résultats de [28], on obtient le :

Théorème 4. Soit $\varepsilon > 0$, pour $\rho \in]0, \frac{R^2}{4a_g}[$, la suite d'observations $X_k(\omega)$ fournit des minima globaux à ε près de \tilde{J}_n :

$$\exists v_\varepsilon = X_k(\omega) \text{ tel que } \tilde{J}_n(v_\varepsilon) \leq \tilde{m}_n + \varepsilon.$$

Pour la fonctionnelle J_n , la démonstration des théorèmes 3 et 4 reste un problème ouvert.

Par ailleurs, à notre connaissance, il semble que seuls des algorithmes stochastiques permettent de démontrer la convergence presque partout vers des minima globaux.

2.4. Résultats numériques

Soit $z = P_{W_n} S(v)$, on a :

$$(z - S(v), \nabla e_i)_0 = 0 \quad \forall i \in [1, \dots, n] \quad \Leftrightarrow \quad (z, \nabla e_i)_0 = (S(v), \nabla e_i)_0 = E_i.$$

Comme $z \in W_n$, on a $z = \sum_{j=1}^n z_j \nabla e_j$ et $E_i = \sum_{j=1}^n z_j (\nabla e_i, \nabla e_j)_0$ ou encore :

$$z = A_n^{-1} E \quad \text{où } A_n = (\nabla e_i, \nabla e_j)_0 \text{ et } E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}.$$

La fonctionnelle (11) devient : $J_n(v) = \frac{1}{2} E A_n^{-1} E$. Annuler J_n revient à annuler E . La fonctionnelle utilisée pour les essais numériques est donc :

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i^2 \quad (16)$$

notée de la même manière que (11) sans confusion possible et qui possède les mêmes propriétés. Les essais numériques fonctionnent sans que l'introduction du prolongement (14) soit nécessaire.

2.4.1. Méthode de discrétisation

L'ouvert Ω est décomposé en $N_1 \times N_2$ rectangles de largeur $h_1 = 2/N_1$ et de hauteur $h_2 = 1/N_2$. Les équations discrétisées s'écrivent en chaque noeud de la grille ainsi définie :

$$E_{ij}(\alpha, g) = 0, \quad i = 2, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad (17)$$

où :

$$E_{i,1} = h_2 \left(\alpha \left(\frac{u_{i,1} - u_{i-1,1}}{h_1} \right) - \alpha \left(\frac{u_{i+1,1} - u_{i,1}}{h_1} \right) \right) - 2 \frac{h_1}{h_2} (u_{i,2} - u_{i,1}) + 2h_1 g(-1 + (i-1)h_1), \quad i = 2, \dots, N_1, \quad (18)$$

$$E_{i,j} = h_2 \left(\alpha \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1} \right) - \alpha \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} \right) \right) + \frac{h_1}{h_2} (-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}), \quad i = 2, \dots, N_1; \quad j = 2, \dots, N_2, \quad (19)$$

$$u_{i,1+N_2} = u_{1,j} = u_{1+N_1,j} = 0, \quad i = 1, \dots, 1+N_1; \quad j = 1, \dots, 1+N_2. \quad (20)$$

On minimise la fonctionnelle :

$$J_n(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij}^2 \quad (21)$$

où μ est une constante positive convenablement choisie.

La dérivation de (21) par rapport à u_{pq} fournit l'expression :

$$\nabla_{pq} J_n = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial E_{ij}}{\partial u_{pq}} E_{ij}(u) \right). \quad (22)$$

2.4.2. Méthode de descente avec interpolation

On introduit la méthode de descente (notée (M)). Elle se décompose en trois étapes :

- (i) choix des pas de descente ρ ,
- (ii) modification de u par :

$$u_{pq}^{(k+1)} = u_{pq}^{(k)} - \rho \nabla_{pq} J_n \quad (23)$$

à chaque nœud (p, q) de la grille de discrétisation, le résultats de (23) est utilisé dans le calcul de (22) dès qu'il est obtenu,

- (iii) calcul de $J_n(u^{(k+1)})$ avec (21) et retour à (ii) tant que $J_n(u^{(k+1)}) < J_n(u^{(k)})$.

Nous considérons également une méthode (notée (IM)) pour interpoler les résultats de (M) :

- (i) introduction d'une nouvelle grille de discrétisation de Ω , (a, b) est un nœud de cette grille,
- (ii) calcul de x_i, x_{i+1}, y_k et y_{k+1} nœud de la grille de discrétisation précédente de telle sorte que : $x_i < a < x_{i+1}$ et $y_k < b < y_{k+1}$,
- (iii) calcul de :

$$ra = \frac{a - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad rb = \frac{b - y_k}{y_{k+1} - y_k}$$

et de $u(a, b)$:

$$u(a, b) = (1 - ra).(1 - rb).u(A) + ra.(1 - rb).u(B) \\ + ra.rb.u(C) + (1 - ra).rb.u(D)$$

où $u(A), u(B), u(C), u(D)$ sont les résultats de (M) aux points A, B, C, D de la grille de discrétisation précédente définis par $A = (x_i, y_k)$, $B = (x_{i+1}, y_k)$, $C = (x_{i+1}, y_{k+1})$, $D = (x_i, y_{k+1})$. Cette interpolation est réalisée avec quatre nœuds, la surface est approchée par une parabole hyperbolique (voir [37] par exemple).

Au point (iii), la discrétisation évolue en fonction des itérations (interpolation évolutive).

Les équations (17)–(20) sont résolues par la procédure suivante :

- (i) choix d'une grille de discrétisation et des initialisations $u^{(0)}$,
- (ii) approximation de la solution par (M),
- (iii) si la discrétisation est suffisamment précise (par évaluation de la précision de la discrétisation de g), la procédure est arrêtée sinon :
- (iv) utilisation de (IM) pour interpoler les résultats de (M) et construire une nouvelle initialisation $u^{(0)}$. Retour à (ii).

2.4.3. Exemples numériques

On pose $M = 0.895$ (comme dans [30,31]) utilisées aussi pour les essais de [1,34].

On pose $\rho = 0.005$. Les essais sont réalisés avec quatre maillages successifs, avec interpolation des résultats de (M) par (IM) à chaque étape :

$$(N_1, N_2) = (8, 4), \quad (N_1, N_2) = (16, 8), \quad (N_1, N_2) = (32, 16) \quad \text{et} \\ (N_1, N_2) = (64, 32).$$

La valeur finale de la fonctionnelle est $J_n = 1.42\text{E}-6$.

La figure 1 est la représentation graphique de $\partial u / \partial x(x, 0)$ sur $] -1, 1[$.

D'autres essais numériques commentés peuvent être trouvés en [25,31].

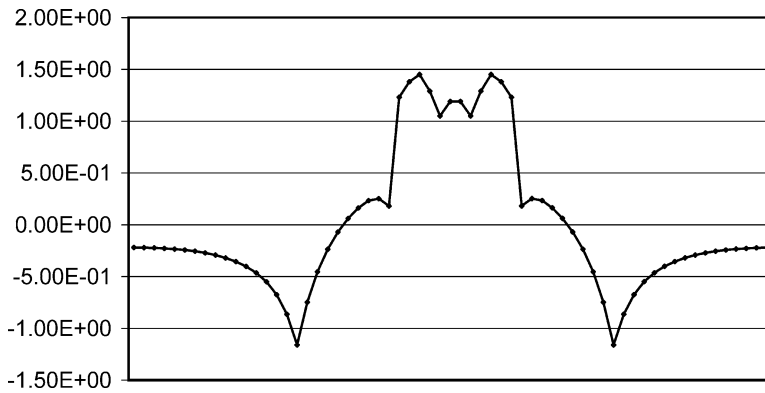


Fig. 1.

3. Problème aux limites avec contrainte

3.1. Position du problème

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u)) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega), \\ \partial_2 u = g & (\Gamma), \\ u = 0 & (\Gamma'), \end{cases} \quad \begin{matrix} (24) \\ (25) \\ (26) \end{matrix}$$

où les données géométriques et les données fonctionnelles sont définies au paragraphe 2.1. Nous adjoignons à (24)–(26) la condition :

$$\Delta u \leq C \quad (27)$$

où C est un paramètre à identifier dans l'intervalle $L = [C_0, +\infty]$ avec C_0 un nombre réel constant.

Dans (27), le laplacien Δ est pris au sens des distributions.

L'inconnue est une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2. Méthodes fonctionnelles

3.2.1. Formulation en projection

Au paragraphe 2.2.1, on a montré :

$$u \in U \text{ est solution de (24)–(26) si et seulement si } P_W S(u) = 0. \quad (28)$$

Par utilisation de la formule de Green généralisée, on montre (en procédant comme dans [26]) que $u \in U$ satisfait (28) si et seulement si :

$$F(u, C) = 0, \quad (29)$$

où

$$q(u, C, v) = [-(\nabla u, H(v)\nabla v)_0 - C(1, v^+)_0]^+,$$

$$F(u, C) = \sup \left\{ \frac{q(u, C, v)}{\|v\|_0}; v \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

avec $s^+ = \max(s, 0)$.

3.2.2. Solutions généralisées à ε près

Introduisons la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2} |P_W(S(u))|_0^2$$

et :

$$K = \{(u, C) \in U \times L, F(u, C) = 0\},$$

$$m_K = \inf \{J(u); (u, C) \in K\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, une solution généralisée à ε près $(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \in U \times L$ de (J, m_K) satisfait :

$$\begin{cases} J(u_\varepsilon) \leq m_K + \varepsilon, \\ F(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (30)$$

Puisque $K \neq \emptyset$ et que J et F sont bornées inférieurement, les solutions généralisées à ε près existent. Par pénalisation de la contrainte en F , on peut construire des solutions de (30) en se passant de K (proposition 7).

Considérons la fonctionnelle pénalisée de J :

$$J_\mu(u, C) = J(u) + \mu F(u, C)$$

avec μ un entier positif ou nul.

On pose :

$$m_\mu = \inf \{J_\mu(u, C), (u, C) \in U \times L\}.$$

Procédant comme dans [26], on obtient la :

Proposition 7. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N/\forall \mu \geq N$, les couples $(u_{\mu\varepsilon}, C_\varepsilon)$ tels que :

$$J_\mu(u_{\mu\varepsilon}, C_\varepsilon) \leq m_\mu + \varepsilon$$

sont solutions de :

$$\begin{cases} J(u_\varepsilon) \leq m_K + \varepsilon, \\ F(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

3.2.3. Passage en dimension finie

On introduit :

$$m_{\mu n} = \inf \{J_\mu(u, C), (u, C) \in V_n \times L\}.$$

Par des arguments analogues à ceux du paragraphe 2.2.3, on obtient le :

Théorème 5. *A μ fixé, pour n suffisamment grand, une solution de :*

$$\exists(u, C) \in V_n \times L \quad J_\mu(u, C) \leq m_{\mu n} + \varepsilon$$

est une solution de :

$$\exists(u, C) \in U \times L \quad J_\mu(u, C) \leq m_\mu + \varepsilon.$$

Pour μ assez grand, une solution de (i) est solution de :

$$\exists(u, C) \in U \times L \quad \begin{cases} J(u) \leq m_K + \varepsilon, \\ F(u, C) \leq \varepsilon, \end{cases}$$

c'est à dire une solution à ε -près de :

$$\exists(u, C) \in K \quad J(u) \leq m_K + \varepsilon.$$

Une démonstration de ce théorème pourra être trouvée dans [29].

Comme en [29], on obtient pour (J_μ, m_μ) l'analogie de la proposition 2 du paragraphe 2.2.2 et du théorème 2 du paragraphe 2.2.4.

Pour la minimisation de $(J_{\mu n}, m_{\mu n})$, on utilise un algorithme de descente comme celui du théorème 3.

3.3. Résultats numériques

Dans cette partie, on pénalise la fonctionnelle (16) par la contrainte (29) discrétisée.

3.3.1. Méthode de discrétisation

La discrétisation (17)–(20) est toujours valable. La condition (4) est discrétisée par :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} \geq u_c \quad i = 1, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2. \quad (31)$$

Dans (29), $F(u, C)$ se discrétise de la même manière que E_{ij} :

$$F_{ij} = (E_{ij}(\text{Id}, 0) - Ch_1 h_2)^+ \quad i = 2, \dots, N_1, \quad j = 2, \dots, N_2 \quad (32)$$

où Id est la fonction définie par :

$$\text{Id}(x) = x.$$

On souhaite déterminer u et C en utilisant une méthode du gradient à pas fixe.

On minimise la fonctionnelle :

$$J_{n\mu}(u, C) = J_n(u) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=2}^{N_2} F_{ij}^2 \quad (33)$$

où μ est une constante positive convenablement choisie. Quand la condition (31) n'est pas vérifiée, on prend $\mu = 0$ dans (33), ceci est en accord avec les observations de [15,16].

La dérivation de (14) par rapport à u_{pq} et par rapport à C fournit les expressions suivantes :

Tableau 1

$C^{(0)}$	E	F	C
0	8.47e-5	2.17e-4	0.03458
-10	1.24e-4	2.87e-4	0.04655
0.1	8.47e-5	2.12e-4	0.05731

$$\nabla_{pq} J_{n\mu} = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial E_{ij}}{\partial u_{pq}} E_{ij}(u) + \mu \frac{\partial F_{ij}}{\partial u_{pq}} F_{ij}(u, C) \right), \quad (34)$$

$$\nabla_C J_{n\mu} = \sum_i \sum_j \left(\mu \frac{\partial F_{ij}}{\partial C} F_{ij}(u, C) \right). \quad (35)$$

Pour dériver (32) dans (34) et (35), on introduit une fonction régularisante. Cependant, cette fonction n'a pas été nécessaire pour les essais numériques.

La méthode de descente avec interpolation (M)–(IM) présentée pour le cas sans contrainte dans le paragraphe 1.4.1 est utilisée ici pour le couple (u, C) .

3.3.2. Exemples numériques

Comme dans 1/4/3/, on pose $M = 0.895$.

On pose $\rho = \rho_C = 0.005$.

Le tableau 1 donne les résultats en fonction de la valeur initiale $C^{(0)}$ de (M). Tous les essais sont réalisés avec quatre maillages successifs, avec interpolation des résultats de (M) par (IM) à chaque étape :

$$(N_1, N_2) = (8, 4), \quad (N_1, N_2) = (16, 8), \quad (N_1, N_2) = (32, 16) \quad \text{et} \\ (N_1, N_2) = (64, 32).$$

Seuls les résultats obtenus à la fin de la procédure sont indiqués :

- la valeur de $E = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij}^2$,
- la valeur de $F = \frac{\mu}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=2}^{N_2} F_{ij}^2$, avec $\mu = 1$,
- la valeur finale de C .

La figure 2 est la représentation graphique de $\partial u / \partial x(x, 0)$ sur $]-1, 1[$ dans le deuxième cas présenté dans le tableau précédent. Les résultats sont toujours satisfaisants par rapport aux critères de qualité définis en [30] :

- non symétrie de l'évolution de $\partial u / \partial x(x, 0)$ sur $]-1, 1[$,
- choc à droite d'amplitude suffisante,
- différence entre le choc à droite et le choc à gauche (quand il existe) supérieure à la moitié du choc à droite,

et les différences entre les représentations pour les trois essais présentés dans le tableau sont peu sensibles.

La modification du pas de descente en C ne modifie pas les résultats obtenus.

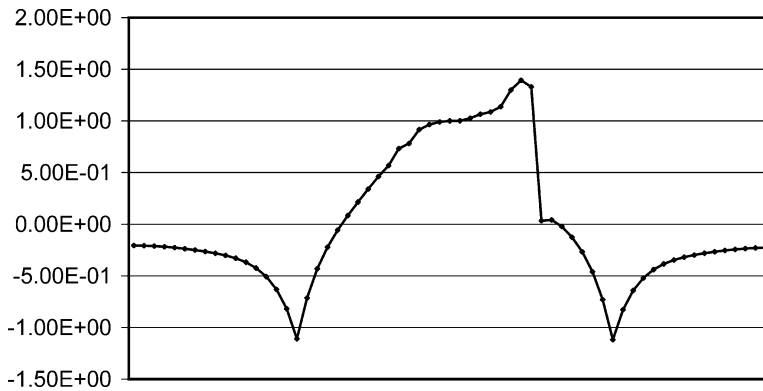


Fig. 2.

Si la condition d'entropie n'est pas introduite, les critères de qualité cités ci-dessus ne sont pas vérifiés : symétrie de l'évolution de $\partial u / \partial x(x, 0)$ sur $] -1, 1[$, choc à droite de faible amplitude égal au choc à gauche (voir figure 1). Ceci a déjà été observé en [41] où une autre méthode de résolution a été utilisée. Si la condition d'entropie est prise comme contrainte dans la zone hyperbolique, la méthode proposée ici fait apparaître un choc à droite significatif.

D'autres résultats numériques sur ce modèle avec contrainte peuvent être trouvés dans [27,29–31].

4. Conclusion

4.1. Commentaires

Au paragraphe 3.2.2, on peut aussi considérer la fonctionnelle :

$$J_{\lambda, \mu} = \lambda J + \mu F$$

et optimiser en pondérant avec $\lambda > 0$. On pourrait minimiser F en prenant pour contrainte $J \leq m + \varepsilon$ (méthode utilisée par exemple en [22,24] pour d'autres problèmes aux limites) c'est à dire prendre $\lambda > 0$ et $\mu = 1$. Cependant, cette méthode présente ici une difficulté car m est inconnu a priori.

Au paragraphe 3.1, en observant que $(u, C) = 0$ est solution des relations (1), (3)–(4), une autre approche serait de minimiser la différence $(\partial_2 u - g)$ sous la contrainte (1), (3)–(4).

Comme il a été signalé à la fin du paragraphe 2.2.4, la formulation en distance permet d'éviter l'interpolation de J par J_n (voir (11)) ce qui devrait faciliter la résolution numérique dans les cas avec ou sans contrainte.

4.2. Extensions

La formulation en distance devrait s'étendre à un ouvert Ω non borné par utilisation d'espaces de Sobolev avec poids ; dans cette direction, on peut se reporter par exemple à [20] pour une approche des écoulements transsoniques décrits par les équations en potentiel complet.

De même, avec cette formulation, on pourrait traiter sur le plan fonctionnel des classes plus générales d'équations aux dérivées partielles stationnaires ou en évolution par utilisation d'espaces adaptés (voir par exemple [23]). Un exemple significatif serait celui du système de la dynamique des gaz incluant l'inégalité de Clausius–Duhem (voir par exemple [40]).

Références

- [1] M. Amara, Analyse de méthodes d'éléments finis pour les écoulements transsoniques, Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, 1983.
- [2] J.P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [3] J.P. Aubin, *Initiation à l'analyse appliquée*, Masson, 1994.
- [4] H. Berger, G. Warnecke, W.L. Wendland, Analysis of a FEM/BEM coupling method for transonic flow computations, *Math. Comp.* 66 (1997).
- [5] V. Billey, J. Periaux, P. Perrier, B. Stouffler, 2D and 3D Euler Computations with Finite Element Methods in Aerodynamics, in: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1270, Springer-Verlag, 1986.
- [6] N.A. Bobylev, S.V. Emel'Yanov, S.K. Korovin, *Geometrical Methods in Variational Problems*, Kluwer, 1999.
- [7] P.B. Bochev, M.D. Gunzburger, Finite element methods of least-squares type, *SIAM Rev.* 40 (1998).
- [8] M.O. Bristeau, O. Pironneau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier, On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element (I) least square formulations and conjugate gradient solution of the continuous problems, *Comm. Math. Appl. Mech. Engrg.* 17/18 (1979).
- [9] S. Canic, B.L. Keyfitz, G.M. Llieberman, A proof of existence of perturbed steady transonic shocks via a free boundary problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 53 (2000).
- [10] J. Cole, L. Cook, *Transonic Aerodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [11] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul scientifique – 5 : spectre des opérateurs*, Masson, 1988.
- [12] M. Feistauer, Analysis in compressible fluid dynamics, *Z. Angew. Math. Mech.* 78 (1998).
- [13] I.M. Gamba, C.S. Morawetz, A viscous approximation for a 2D steady semiconductor or transonic gas dynamic flow: Existence theorem for potential flow, *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (1996).
- [14] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.
- [15] H.P. Gittel, Local entropy conditions in transonic potential flows problems, *Math. Nachr.* 154 (1991).
- [16] H.P. Gittel, A variational approach to transonic potential flow problems, *Math. Methods Appl. Sci.* 23 (2000).
- [17] K.G. Guderley, *Theorie schallnaher Strömungen*, Springer-Verlag, 1957.
- [18] M.M. Hafez, W.H. Guo, Nonuniqueness of transonic flows, *Acta Mech.* 138 (1999).
- [19] B. Heron, F. Issard-Roch, *Analyse numérique*, Dunod, 1999.
- [20] J.C. Jolly, Solutions à ε près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés (2ème partie), Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2001.
- [21] B.L. Keyfitz, C.A. Mora, Prototypes for nonstrict hyperbolicity in conversation laws, *Contemporary Math.* 255 (2000).
- [22] J.S. Le Brizaut, Another nonlinear control method: penalization by the state equation, *Systems Anal. Modelling Simulation* 16 (1994).
- [23] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, Optimisation à ε près – Transformation des edp par projection – Application à l'identification, Rapport de Recherche Equipe de Recherche en Mathématiques ECN n°5, 1996.

- [24] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, Une méthode non linéaire de contrôle avec pénalisation d'état, *Ann. Sci. Math. Québec* 21 (1997).
- [25] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, Approche fonctionnelle et numérique d'un problème mixte non linéaire elliptique hyperbolique (modèle de Karman et Guderley), *Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°10/1*, 1999.
- [26] J.S. Le Brizaut, Méthodes à ε près et applications à des problèmes aux limites, *Bull. Sci. Math.* 125 (2001).
- [27] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, Etude numérique de l'influence d'un paramètre d'entropie dans un modèle transsonique, *Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°03/2*, 2001.
- [28] J.S. Le Brizaut, Une méthode d'optimisation stochastique pour évaluer des minima à epsilon près, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002).
- [29] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, Identification d'un paramètre transsonique, *Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°10/01*, 2002.
- [30] J.S. Le Brizaut, Numerical study of the effect of an entropy parameter in an elliptic hyperbolic nonlinear boundary value problem, *Systems Anal. Modelling Simulation* 36 (2002).
- [31] J.S. Le Brizaut, M. Pogu, A mixed non linear boundary value problem appearing in gas dynamics: generalized solutions and numerical results, *Internat. J. Engrg. Sci.* 40 (2002).
- [32] J. Malek, J. Necas, M. Rokyta, Weak and measure valued solutions to evolutionary PDEs, *Appl. Math. Math. Comput.* 13 (1996).
- [33] F. Murat, L'injection du cône positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q < 2$, *Math. Pures Appl.* 60 (1981).
- [34] E.M. Murman, Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods, *AIAA J.* 12 (1974).
- [35] J. Necas, *Ecoulements de fluides: compacité par entropie*, Masson, 1989.
- [36] J.W. Neuberger, Sobolev Gradients and Differential Equations, in: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1670, Springer-Verlag, 1997.
- [37] J.P. Nougier, *Méthodes de calcul numérique*, Masson, 1987.
- [38] O. Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988.
- [39] M. Pogu, G. Tournemine, A functional approach to the solution of the Karman Guderley equation, *Bull. Polish Acad. Sci. Technical Sci.* 40 (4) (1992).
- [40] M. Pogu, G. Tournemine, *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*, Ellipses, 1992.
- [41] M. Pogu, J.E. Souza De Cursi, On a numerical solution of a class of partial differential equations of mixed type not adding artificial terms, *Comm. Numer. Methods Engrg.* 9 (1993).
- [42] H.J. Ramm, *Fluid Dynamics for the Study of Transonic Fluid*, Oxford University Press, 1990.
- [43] M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, 1975.